Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
18.12.2008

Übungen zur Analysis 2

Blatt 11

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 08.01.2009

Aufgabe 50 (4 Punkte)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben, und es gelte $||A||^2 := \sum_{\mu,\nu}^{n} |a_{\mu\nu}|^2 < 1$.

(a) Zeige: Es gibt genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des Gleichungssystems $x = Ax + b$.

(b) Leite ein Iterationsverfahren zur Berechnung der Lösung aus (a) her sowie eine Aussage zur Konvergenzgeschwindigkeit dieses Verfahrens.

Aufgabe 51 (7 Punkte)

(a) Zeige, dass die Funktion $f(x, y) := \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf $M := \mathbb{R}^2 \backslash \{\binom{0}{0}\}$ lokal injektiv ist.

(b) Berechne die Umkehrfunktion f^{-1} in einer Umgebung von $f(1, 1) = \binom{0}{2}$ sowie die Ableitung $(f^{-1})'(0, 2)$.

(c) Ist f injektiv auf ganz M?

(d) Interpretiere f und f^{-1} als Funktionen von $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$.

Aufgabe 52 (5 Punkte)

Betrachte die implizit gegebene Kurve $x^2 + y^3 - x^4y^5 = 1$.

(a) Der Punkt $\binom{1}{1}$ liegt auf dieser Kurve. Untersuche, ob lokale Auflösungen $x(y)$ bzw. $y(x)$ um diesen Punkt nach y bzw. x möglich sind, und berechne gegebenenfalls $y'(1)$ bzw. $x'(1)$.

(b) Führe dieselbe Untersuchung auf lokale Auflösbarkeit um den Punkt $\binom{-1}{0}$ der Kurve durch.

Aufgabe 53 (8 Punkte)

(a) Bestimme die Extremalwerte der Funktion $f(x, y) = xy$ auf dem Einheitskreis $M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) Bestimme die Extremalwerte der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ auf dem Kreisring $M = \{\binom{x}{y} \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

(c) Bestimme die Extremalwerte der Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$ mit der Kugeloberfläche $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$.

Das Analysis-Team wünscht Euch erholsame Feiertage!

http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/